

Determinant yordamida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish. Kramer formulalari

Aytaylik, n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = c_i; \quad i = \overline{1, n} \quad (2.3.1)$$

sistemi berilgan bo'lsin, bu yerda $a_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ sistemaning koeffitsiyentlari va $c_i (i = \overline{1, n})$ uning o'ng tomoni (yoki ozod hadlari) deb atalib, ular berilgan (ma'lum) ifodalar (sonlar)dir, $x_j (j = \overline{1, n})$ esa noma'lumlardir.

Berilgan (2.3.1) sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.3.2)$$

ni sistemaning determinanti (aniqllovchisi) deyiladi.

2.3.1-ta'rif. Agar ushbu n ta $x'_j (j = \overline{1, n})$ ifodalar (sonlar) sistemi uchun

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j = c_i; \quad i = \overline{1, n}$ tengliklar o'rinli bo'lsa, bu ifodalar (sonlar) sistemi (2.3.1) sistemaning yechimi deyiladi. Yechimi mavjud bo'lgan sistemani birgalikda, mavjud bo'lmasa, birgalikda emas deyiladi.

Agar (2.3.1) ning har ikki tomonini (2.3.2) ning A_{ik} algebraik to'ldiruvchisiga ko'paytirib, so'ngra, bu sistemaning barcha tenglamalarini hadlab qo'shsak, 2.2.2-teorema ko'ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ik} x_j \right) &= \sum_{i=1}^n c_i A_{ik} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} \right) x_j = \Delta_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta \cdot x_k = \Delta_k \end{aligned}$$

ni olamiz. Bu yerda Δ_k (2.3.2) sistema determinantining k -ustuni o'rniga (2.3.1) ning o'ng tomonini yozish bilan hosil qilinib, ularni sistemaning yordamchi determinantlari deb ataladi.

Oxirgi olingan natijani barcha $k = \overline{1, n}$ uchun bajarib,

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j; \quad j = \overline{1, n} \quad (2.3.3)$$

sistemaga kelamiz. Bu shakl almashtirishlar natijasida hosil qilingan, (2.3.3) sistemani (2.3.1) ning yechimi qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas. Agar

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}^2 > 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.3.4)$$

shart bajarilsa, yuqorida bajarilganlar elementar shakl almashtirishlardan iborat bo'lib, (2.3.1) va (2.3.3) sistemalarning ekvivalent bo'lishi ravshandir.

Eslatma. (2.3.1) sistemada elementar shakl almashtirishlar deyilganda quyidagilarni tushunamiz:

- 1) (2.3.1) ning ixtiyoriy tenglamasining barcha hadlarini noldan farqli songa ko'paytirish yoki bo'lish;
- 2) ixtiyoriy ikkita tenglamalarining o'rinlarini almashtirish;

3) ixtiyoriy tenglamasining hadlariga boshqa biror tenglamasi mos hadlarini bitta songa ko'paytirib qo'shish.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2.3.4)ning bajarilishi kelib chiqadi va bu vaqtda (2.3.1) va (2.3.3) ekvivalent sistemalar bo'lib, ularning yechimi uchun

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \quad j = \overline{1, n} \quad (2.3.5)$$

ga ega bo'lamiz. (2.3.5) *Kramer formulalari* deb ataladi.

2.3.1-teorema. Agar (2.3.1) n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining (2.3.2) determinanti noldan farqli bo'lsa, u yagona yechimga egadir.

Isbot. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2.3.1)ning yechimi mavjudligini yuqorida isbotladik. Yagonaligi (2.3.1) va (2.3.3) sistemalar ekvivalentligidan kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$
 sistemani yeching.

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 = -22 \neq 0,$

demak, sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 9 = -44, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 28 = -22.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = \frac{44}{22} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1.$$

Javob:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

2-misol.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 12 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4(7 - 5) = -8 \end{aligned}$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 4 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -40 + 24 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -10 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 42 - 50 = -8;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1.$$

Javob:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

2.3.2-teorema. Agar (2.3.1) sistemaning (2.3.2) determinanti nolga teng (ya'ni $\Delta = 0$) bo'lib, uning yordamchi Δ_j ($j = \overline{1, n}$) determinantlaridan birortasi noldan farqli bo'lsa, (2.3.1) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teorema sharti asosida (2.3.3) sistema yechimga ega emasligi aniqdir. Agar (2.3.1) yechimga ega deb faraz qilinsa, bu yechim (2.3.3)ning ham yechimi bo'lishi kerak, ammo, buning bo'lishi mumkin emas. Demak, (2.3.1) yechimga ega emas ekan. Teorema isbotlandi.

2.3.3-teorema. Agar (2.3.1) sistemaning (2.3.2) determinanti Δ bilan birga uning yordamchi Δ_j ($j = \overline{1, n}$) determinantlarining barchasi nolga teng (ya'ni $\Delta_j = \Delta = 0$, $j = \overline{1, n}$) bo'lsa, u vaqtda (2.3.1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. $n=1$ bo'lgan holda $0x_1=0$ ko'rinishdagi tenglama cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi ma'lumdir. Endi, $n>1$ bo'lgan holni qaraylik. Teorema sharti asosida (2.3.3) sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi ravshandir. Agar (2.3.4) shart bajarilsa, (2.3.1) ham cheksiz ko'p yechimga egaligi kelib chiqadi. Demak, (2.3.4) shart bajarilmagan holni tekshirib ko'rish kifoyadir. Agar sistema koeffitsiyentlarining barchasi nolga teng bo'lsa, (2.3.4) bajarilmaydi va bu holda sistemaning o'ng tomoni qanday bo'lishidan qa'ti nazar $\Delta_j = 0$, ($j = \overline{1, n}$) bo'lib, birorta tenglamaning o'ng tomonidagi son noldan farqli bo'lsa, bu tenglama ziddiyatli ekanligidan sistema yechimga ega bo'lmaydi; o'ng tomondagi barcha sonlar nolga teng bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi ravshandir.

Agar sistema koeffitsiyentlaridan birortasi, masalan, $a_{i_0 j_0} \neq 0$ bo'lsa, i_0 tenglamaning har ikki tomonini bu noldan farqli koeffitsiyentga bo'lib, so'ngra uning yordamida qolgan tenglamalardagi x_{j_0} qatnashgan hadni yo'qatish mumkin. Buning natijasida i_0 -tenglamada x_{j_0} noma'lum qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi va i_0 -tenglamasiz qolgan tenglamalardan tuzilgan $(n-1)$ noma'lumli $(n-1)$ ta chiziqli

tenglamalar sistemasining determinanti $(-1)^{i_0+j_0} \cdot \frac{\Delta}{a_{i_0j_0}}$ ga teng bo'lib, u ham $\Delta = 0$

bo'lganligi sababli, nolga tengdir. Xuddi shunga o'xshash bu sistemaning yordamchi determinantlari ham nolga teng bo'lishi ko'rsatiladi. Olingan sistema uchun yana teoremaning yuqorida isbotlangan qismida bayon qilingan hollardan biri yuz bersa, masala hal, aks holda, yuqorida qilingan ishni takrorlab, yana bitta noma'lumni yo'qatib, tenglamalar sonini bittaga kamaytiramiz va hokazo. Bu jarayon davomida biror qadamda teoremaning yuqorida isbotlangan qismida qayd qilingan hollardan biri yuz beradi yoki, aks holda, oxir oqibat (2.3.1) noma'lumlardan birortasiga nisbatan $0x_{k_0} = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga kelamiz va cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar (2.3.1) sistemaning o'ng tomonidagi barcha $c_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$) bo'sa, uni *bir jinsli sistema* deb atalib, $x_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$) unga yechim bo'lishi ayondir va bu holda bir jinsli sistema noldan farqli (x_j ($j = \overline{1, n}$) lardan birortasi noldan farqli bo'ladigan) yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng ($\Delta = 0$) bo'lishi zarur va yetarlidir.

3-misol.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

sistema tekshirilsin.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

sistema ikkinchi tenglamasini 2 ga bo'lib,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 3y = 3 \Leftrightarrow x = -1,5(y - 1)$$

ga ega bo'lamiz. Demak, sistema birgalikda va u cheksiz ko'p yechimga egadir: $\{(-1,5(y - 1); y) : y \in R\}$.

4-misol.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3, \\ 10x + 4y = 7 \end{cases}$$

sistema tekshirilsin.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Demak, sistema birgalikda emas.

5-misol.

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Berilgan sistema bir jinsli va uning determinanti nolga tengligi sababli u cheksiz ko'p yechimga egadir. Sistemaning uchinchi tenglamasi ikkinchi tenglamasini 2 ga hadlab ko'paytirish natijasi ekanligini ko'rish mumkin. Demak,

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \end{cases}$$

sistema berilganga teng kuchlidir. Bundan

$$\begin{cases} x - y = z, \\ x - 2y = z \end{cases}$$

sistemani hosil qilib, $z \in R$ ixtiyoriy son deb faraz qilib, uni yechsak,

$$\begin{cases} x = z, \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in R$$

ga kelamiz. Demak, $\{(t; 0; t): t \in R\}$ - sistema cheksiz ko'p yechimga egadir.

2- bobga doir mashqlar

1. Determinantni hisoblang:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^3 & a^2 \end{vmatrix}; \quad e) \begin{vmatrix} a^2 - 1 & b + c \\ a^2 + a & ab + ac \end{vmatrix}; \quad f) \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^4 \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{vmatrix};$$

Javob: a) 17; b) -5; c) 1; d) 0; e) 0; f) $1/\cos^2 \alpha$

2. Tenglamani yeching:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & x^2 - 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x + 22 \end{vmatrix} = 0, \quad c) \begin{vmatrix} x & x + 1 \\ -4 & x + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad d) \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x - 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \text{ Javob:}$$

$$a) x = \pm 4; \quad b) x = 2; \quad c) x_1 = -1, x_2 = -4;$$

$$d) x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{3}{2}.$$

3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yeching:

$$a) \begin{cases} 8x - y = 4; \\ 9x + 2y = 17 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 9y - 4x = 1; \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x - y = 6; \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{Javob:} \quad a) (1; 4) \quad b) (2; 1) \quad c) \emptyset,$$

4. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$a) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 7; \\ x - 2y + 4z = 6; \\ 3x - y + 5z = 11 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 4y + z = 1; \\ x + 5y - 3z = 18; \\ 3x + y + 9z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Javob:} \quad a) (2; 0; 1) \quad b) (5; 2; -1)$$

5. To'rt noma'lumli to'rtta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x - y + 5z - 2t = -8; \\ 3x - y + 4z - 3t = -12; \\ x - 3y + 6z - t = -12; \\ 3x - 2y + z - t = -11 \end{cases}$$

$$\text{Javob: } (-1; 3; 0; 2)$$